The Neuroinformatics Group

Klangsynthese und Audiobearbeitung

Thomas Hermann & Peter Meinicke
AG Neuroinformatik
Universität Bielefeld

Termin 6, Subtraktive Synthese, 29. Mai 2002

http://www.techfak.uni-bielefeld.de/ags/ni/projects/datason/l/KlangsyntheseSS2002.html

4.4 Systeme

Def: System = beliebiger Prozeß zur Transformation von Signalen

- speicherfrei: $y[n] = f(x[n])$
- Linearität: $H(x_1[n] + x_2[n]) = H(x_1[n]) + H(x_2[n])$
- Zeitinvarianz: $H(x[n-D]) = y[n-D]$ wenn $H(x[n]) = y[n]$
- Invertierbarkeit: $x[n]$ aus $y[n]$ rekonstruierbar
- Kausalität: $y[n]$ hängt nicht von zukünftigen Signalen ab
- Stabilität: $y[n]$ beschränkt für stationären Input

4.4.1 LTI-Systeme I

- Systeme die **linear** und **zeitinvariant** sind
- LTI-Systeme charakterisierbar durch **Impulsantwort**
  = Antwort auf das Signal $\delta[n] = \{1, 0, 0, 0, 0, ...\}$
- Sei $h[n] = H(\delta[n])$, dann

$$
\begin{aligned}
H(x[n]) &= H\left(\sum_m (x[m] \cdot \delta[n-m])\right) && (1)\\
&= \sum_m x[m] H(\delta[n-m]) && (2)\\
&= \sum_m x[m] h[n-m] = x[n] * h[n] && (3)
\end{aligned}
$$

- Faltung zweier Signale = Produkt der Fouriertransformierten
- Faltung ist linear, kommutativ

4.4.1 LTI-Systeme II

- Analoge Systeme sind oft durch **lineare DGL** beschrieben, z.B.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x}{dt^k}}$$

- Beispiele: RLC-Netze, Masse-Feder, Schall in Membran
- In digitalen Systemen gehen Ableitungen in Differenzen über:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]}$$

- Achtung: nicht direkt!
- Auflösen ergibt Algorithmus - rekursive Gleichung:

$$\boxed{y[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right)}$$

- Inkrementelle Berechnungsvorschrift, rekursiv, Speicher N

4.4.1 LTI-Systeme II

$$\boxed{y[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right)}$$

- oBdA $a_0 = 1$
- Spezialfall 1: **FIR-Filter** (Finite-Impulse Response) = $N = 0$
- Entspricht Faltung mit $h[n] = \{b_1, b_2, b_3, ...\}$
- Ist $N > 0$ nennt man Systeme **IIR-Filter** (Infinite Impulse Response)
- Einfaches System mit Speicher: Delay (Verzögerung) $y[n] = x[n] + y[n-D]$

4.4.2 Charakterisierung von LTI-Systemen

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]}$$

LTI-Systeme können:

- Bestimmte Frequenzen unterdrücken oder verstärken
- die Phasenlage der Spektralkomponenten manuipulieren
- **NICHT** neue Frequenzen entstehen lassen

Bei der Analyse hilft außerordentlich die z-Transformation

$$\boxed{X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}}$$

- z ist eine komplexe Variable !!
- Jedem Signal $x[n]$ wird eine komplexe Funktion $X(z)$ zugeordnet.
- $z = e^{i\omega}$ liefert Fourierbasis: $X(e^{i\omega}) = F(x(t))(\omega)$

4.4.2 Charakterisierung von LTI-Systemen II

$$\boxed{X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}}$$

z-Transformation eines Delays $y[n] = x[n-D]$:

$$Y(z) = \sum x[n-D] z^{-n} = \sum x[n'] z^{-(n'+D)} = X(z) \cdot z^{-D} \tag{4}$$

Analyse eines LTI-Systems mittels z-Transformation

$$\boxed{X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=1}^{M} b_k x[n-k] \tag{5}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right) Y(z) = \left(\sum_{k=1}^{M} b_k z^{-k}\right) X(z) \tag{6}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=1}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{7}$$

Folgerungen

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=1}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{8}$$

- $Y(z) = X(z) \cdot H(z) \Leftrightarrow H(z) = Y(z)/X(z)$
- Frequenzgang des Systems: $|H(e^{i\omega})|$
- Geg. Differenzgleichung $\rightarrow$ berechne Frequenzgang
- Gesucht Filter $\rightarrow$ erstelle Rationale Funktion mit passenden Werteverlauf auf dem Einheitskreis – fertig!

Von $H(z)$ zum Pol-Nullstellen-Diagramm

Betrachte System Erster Ordnung: $y[n] = x[n] + ay[n-1]$

- z-Transform: $Y(z) = X(z) + aY(z)z^{-1}$
- Y Isolieren: $Y(z)(1 - az^{-1}) = X(z)$
- Auflösen nach $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(Z)} = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$
- Erweitern mit z: $H(z) = \dfrac{z}{z - a}$
- Nullstelle: $z = 0$, Polstelle $z = a + 0i$ (auf reeler Achse)

Pol-Nullstellen-Diagramm

Folgerungen:

- $a > 0 \Rightarrow$ Pol näher an $\omega = 0 \Rightarrow$ Tiefpassfilter
- $a < 0$ Pol näher an $\omega = \pi \Rightarrow$ Hochpassfilter
- Flankensteilheit (Gain) hängt von Nähe der Polstelle vom Einheitskreis ab.
- Systeme zweiter Ordnung $\Rightarrow$ komplexe Lösung = Resonanzen
- Komplexe Lösungen sind immer konjugiert

Pol-Nullstellen-Diagramm

Bemerkungen:

- Nullstellen und Polstellen können einander kompensieren - **Allpass-filter**
- $a > 0 \Rightarrow$ Pol näher an $\omega = 0 \Rightarrow$ Tiefpassfilter
- $a < 0$ Pol näher an $\omega = \pi \Rightarrow$ Hochpassfilter
- Flankensteilheit (Gain) hängt von Nähe der Polstelle vom Einheitskreis ab.
- Systeme zweiter Ordnung $\Rightarrow$ komplexe Lösung = Resonanzen
- Komplexe Lösungen sind immer konjugiert