Universität Bielefeld

Technische Fakultät
AG Neuroinformatik
Robert Haschke

Sekretariat: P. Udelhoven
Raum M7-113
Tel. 106-6891

Übungen zu "Robotik II"
WS 2003/04 Blatt 1

Ausgabe: 16.10. 2003, **Abgabe:** 23.10. 2003

Übungsgruppen dürfen aus nicht mehr als drei Personen gebildet werden, die Übungszettel können in der Vorlesung oder direkt in M7-123 abgegeben. Email-Einsendungen sind möglich und erwünscht. Der erste Übungszettel wird am 24.10. besprochen. Übungszettel, die nur mit Mühe und Phantasie zu entziffern sind, werden nicht bewertet!

Aufgabe 1.1, Das Kreuzprodukt: Zeigen Sie die Identität

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{a} \cdot \vec{b} \qquad \text{wobei} \qquad \hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.2, Das Matrixexponential: Angenommen $\vec{\omega}$ habe Einheitslänge ($||\vec{\omega}|| = 1$). Zeigen Sie mit Hilfe der Reihendarstellung von $\sin$ und $\cos$:

$$\mathrm{e}^{\hat{\omega}\theta} = \mathbf{1} + \hat{\omega}\theta + \frac{(\hat{\omega}\theta)^2}{2!} + \frac{(\hat{\omega}\theta)^3}{3!} + \ldots \tag{1}$$
$$= \mathbf{1} + \hat{\omega}\sin\theta + \hat{\omega}^2(1-\cos\theta)\,. \tag{2}$$

Hinweis: Leiten Sie zunächst eine allgemeine Formel für die geraden und ungeraden Potenzen von $\hat{\omega}$ her.

Aufgabe 1.3, Rotationsmatrizen: Zeigen Sie, dass $e^{\hat{\omega}\theta}$ tatsächlich eine Rotationsmatrix ist, d.h. ein Element von $SO(3)$. Wie üblich sei $\vec{\omega}$ normiert, d.h. $||\vec{\omega}|| = 1$.

Aufgabe 1.4, Euler ZYX-Winkel: Die Euler ZYX-Winkel sind auch als roll, pitch, yaw bekannt und beziehen sich immer auf das feste Weltkoordinatensystem. Folgende Rotationen werden nacheinander ausgeführt:

1. Rotiere um den Winkel ϕ um die z-Achse (roll)
2. Rotiere um den Winkel θ um die neue y-Achse (pitch)
3. Rotiere um den Winkel ψ um die neue x-Achse (yaw)

a) Berechnen Sie die allgemeine Rotationsmatrix $R = R_{z,\phi} \cdot R_{y,\theta} \cdot R_{x,\psi}$.

b) Ist die Abbildung $(\psi, \theta, \phi) \mapsto R)$ surjektiv? Berechnen Sie (ψ, θ, ϕ) für eine beliebige Rotationsmatrix. Tip: Multiplizieren Sie beide Seiten der Gleichung mit $R_{z,\phi}^{-1}$ und vergleichen Sie die Komponenten der resultierenden Matrizen.

c) Zeigen Sie, dass bei $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ eine Singularität existiert. Verwenden Sie zur Vereinfachung der Matrix R die Additionstheoreme. Machen Sie sich das Ergebnis anschaulich klar!

Aufgabe 1.5, Quaternionen: Sei $Q = (q_0, \vec{q}) = (\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2})\vec{\omega})$ ein Einheits-Quaternion ($||Q|| = 1$), dass eine Rotation um die Achse $\vec{\omega}$ und den Winkel θ beschreibt.

a) Für einen Vektor $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ wird das reine Quaternion $P = (0, \vec{p})$ definiert, d.h. der skalare Anteil ist Null. Zeigen Sie:

$$Q \cdot P \cdot Q^* = \big(0, (q_0^2 - \vec{q} \cdot \vec{q})\vec{p} + 2(q_0(\vec{q} \times \vec{p}) + (\vec{p} \cdot \vec{q})\vec{q})\big) = (0, R(\vec{\omega}, \theta)\vec{p})$$

Das Ergebnis der Multiplikation ist also wieder ein reines Quaternion, dessen Vektoranteil dem um $R(\vec{\omega}, \theta)$ rotierten Vektor entspricht.

b) Vergleichen Sie die Anzahl der Additionen (bzw. Subtraktionen) und der Multiplikationen (bzw. Divisionen), die erforderlich sind, um

- zwei Rotationsmatrizen zu multiplizieren,
- zwei Quaternionen zu multiplizieren
- eine Rotationsmatrix auf einen Vektor anzuwenden
- ein Quaternion auf einen Vektor anzuwenden (siehe a)).