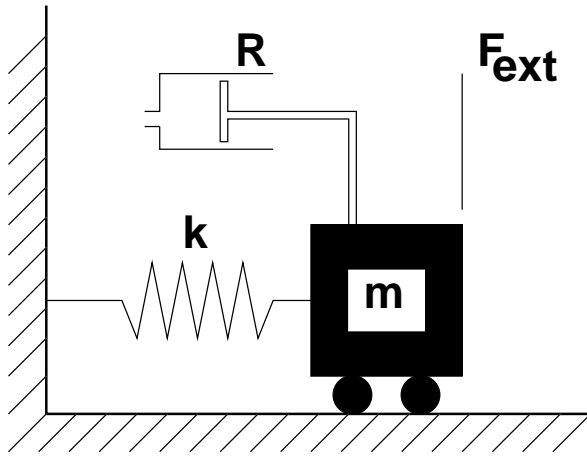


# Klangsynthese und Audiobearbeitung

Thomas Hermann & Peter Meinicke  
AG Neuroinformatik  
Universität Bielefeld

Termin 3, Akustik & Signalverarbeitung, 29. April 2002  
[http://www.techfak.uni-bielefeld.de/ags/ni/  
projects/datason/1/KlangsyntheseSS2002.html](http://www.techfak.uni-bielefeld.de/ags/ni/projects/datason/1/KlangsyntheseSS2002.html)

## 3.3 Erzwungene Schwingungen



System: Externe Kraft  $F_{ext}$  wirkt auf Masse-Feder-System

Bewegungsgleichung (DGL):

$$F_{ext}(t) = m\ddot{x}(t) + R\dot{x}(t) + kx(t) \quad (1)$$

Lösung: DGL ist linear, d.h. die Lösung ist allgemein

$$x(t) = x_{hom}(t) + x_{inhom}(t) \quad (2)$$

o. B. d. A.  $F_{ext}(t) = \hat{F}e^{i\omega t}$

**Linearität:** Lösung für Basisfunktionen  $\Rightarrow$  Lösung für alle Funktionen !

# Erzw. Schwingung - Lösung

$$F_{ext}(t) = m\ddot{x}(t) + R\dot{x}(t) + kx(t)$$

Lösungsansatz:

$$x(t) = Ae^{Bt}$$

$$\dot{x}(t) = AB e^{Bt}$$

$$\ddot{x}(t) = AB^2 e^{Bt}$$

Einsetzen in DGL:  $\hat{F}e^{i\omega t} = mAB^2e^{Bt} + RABe^{Bt} + kAe^{Bt}$

- Es gilt  $\forall t \Rightarrow B = i\omega$
- $\Rightarrow \frac{\hat{F}}{m} = -A\omega^2 + 2\gamma Ai\omega + \omega_0 A$
- Isoliere  $A$ :

$$A = \frac{\hat{F}/m}{\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\gamma\omega}$$

- Amplitude hängt von Anregungsfrequenz  $\omega$  ab.
- $A$  ist komplex  $A = \hat{A}e^{i\phi}$ .
- Phasenverschiebung  $\phi$  zwischen  $x(t)$  und  $F(t)$ .

Einschub: Phase und Betrag komplexer Zahlen:

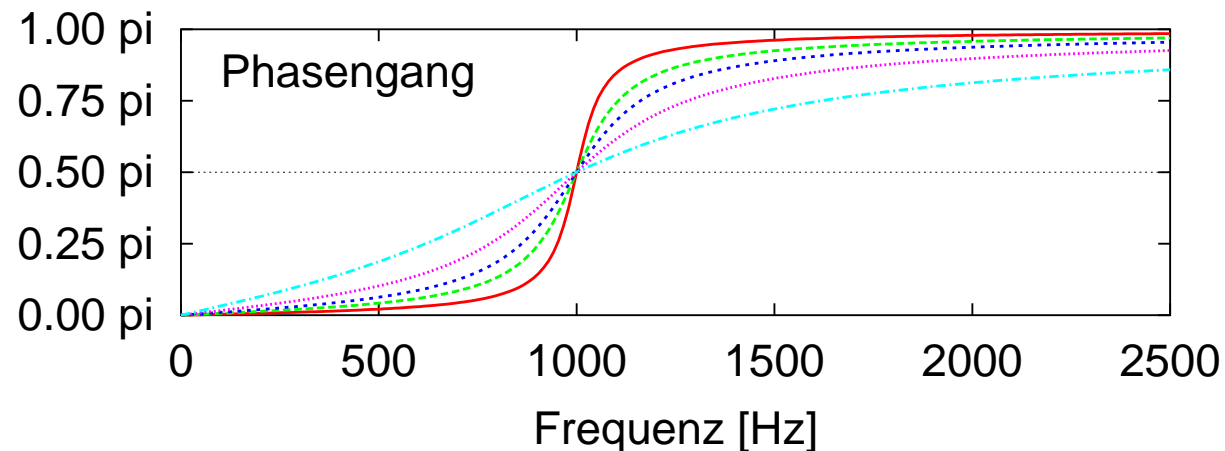
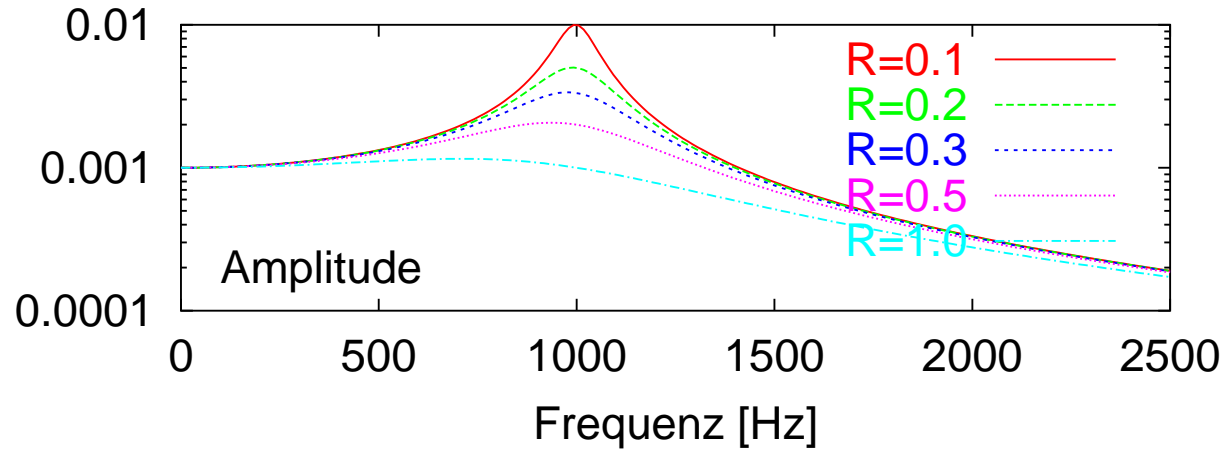
$$z = a + bi = |z|e^{i\phi} \text{ mit } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ und } \tan(\phi) = b/a$$

Maximale Amplitude bei der Resonanzfrequenz  $\omega_r$ .

Bedingung:  $\hat{A}$  maximal  $\rightarrow$  Nennerbetrag minimal

$$\hat{A} = \frac{\hat{F}/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad (3)$$

Plot des Betrags der Amplitude  $\hat{A}(\omega)$ :



Frequenzgang:

- Amplitude maximal in Resonanz: Energie oszilliert
- Je kleiner  $R$ , desto ausgeprägter die Resonanzamplitude.

Phasengang:

- “in Phase” bei niedrigen Frequenzen, stiffness-controlled
- “45° im Resonanzfall.
- “Gegenphase” bei hohen Frequenzen, mass-controlled

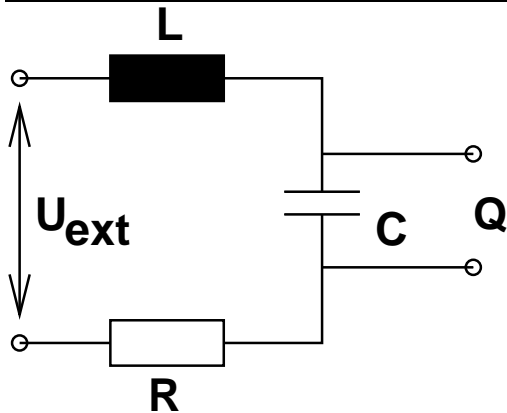
Allg. Lösung:

- Überlagerung der freien und erzwungenen Schwingung, also  
$$x(t) = Ce^{-\gamma t} e^{i\omega_f t} - \hat{A} e^{(-i\omega t - \phi)}$$
- 1. Term verschwindet (transient)
- 2. Term ist stationäre Lösung

# Mechanik $\Leftrightarrow$ Elektrodynamik

Analogon zum Elektrischen Schwingkreis:

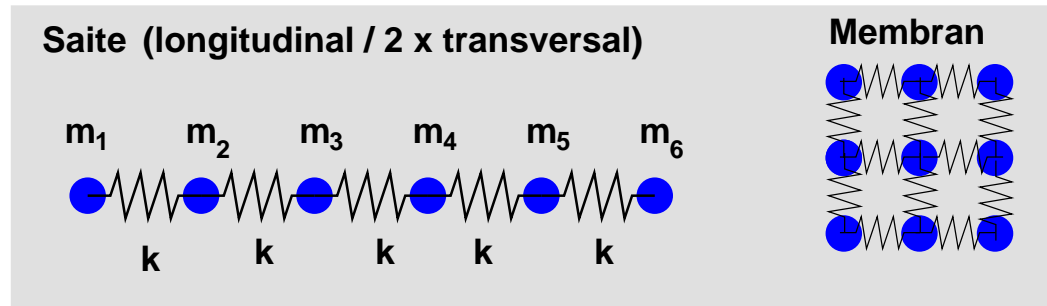
Ladung	$Q$	$x$	Ort
Strom	$I$	$v$	Geschwindigkeit
Spannung	$U$	$F$	Kraft
Widerstand	" $R = U/I$ "	$R = F_r/v$	Mechanischer Widerstand
Induktivität	$L$	$m$	Masse
1/Kapazität	$U = Q/C$	$F = -kx$	Federkraft
Induktion	$U = -L\dot{I}$	$F = ma$	Newtons Gesetz



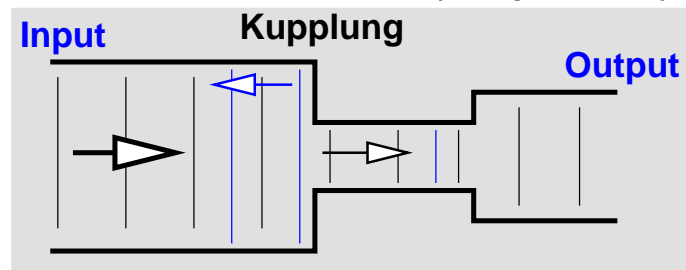
- Elektronik: Input  $U$  Output  $I \Rightarrow U/I = Z$   
Impedanz.
- Analog:           Mechanische    Impedanz  
 $Z = F/v$ .

## 3.4 Komplexe Systeme

- Saite (1D), Membran (2D), Festkörper (3D) unter Spannung  
⇒ modellierbar als Massen/Federn-Netzwerk



- Schallwellen im Hohlraum (Flöte, Klarinette, Sprachtrakt)  
⇒ modellierbar als Wellenleiter/DWG (Kapitel 7)



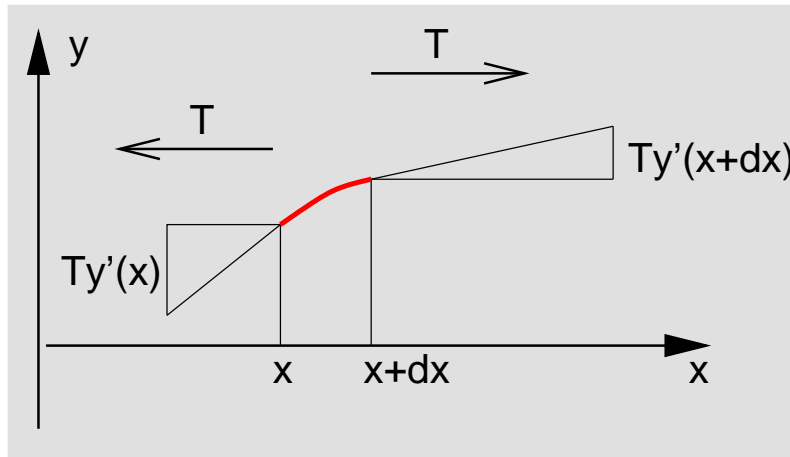
- Weitere Bereiche der Akustik: Schallabstrahlung, Raumakustik, Bewegte Schallquellen, Turbulente und Nichtlineare Phänomene



## 3.5 Schallwellengleichung

- Am Beispiel der Saite (1D), Transversalwellen
- Kontinuierliche Systeme (Massendichte  $\epsilon$  [g/m])
- Betrachte: Kraft auf kleines Massenelement  $dx$ :

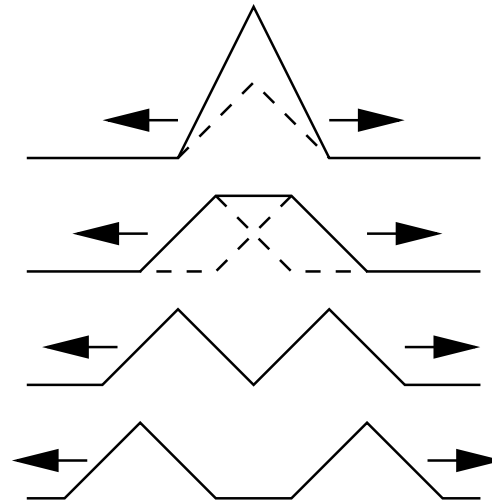
$$F(x) = Ty'(x) - Ty'(x + dx) = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$



- Newton:  $F = m\ddot{x}$  mit  $m = \epsilon dx$  und  $\ddot{x} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$
- Wellengleichung  $\epsilon \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$  (partielle lineare DGL)

# Schallwellengleichung: Lösung

- Lösen durch Probieren:  $y_+(x, t) = F(x - ct)$   
und  $y_-(x, t) = F(x + ct)$
- Ableiten und Einsetzen:  $c = \sqrt{T/\epsilon}$  Laufgeschwindigkeit



- Einspannungspunkte der Saite führen zur **Reflexion**
- Details: Kapitel 7 (Physical Modelling)