

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2018

Präsenzübungsblatt 11

(41) Sind die folgenden Matrizen Markov-Matrizen? Begründung!

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & x \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & x & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(42) Bestimmen Sie für folgende Markov-Matrix einen Gleichgewichtszustand. Ist er eindeutig?

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(43) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $\exp(tA) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (tA)^n$.

(b) Weisen Sie die Markov-Eigenschaft von $\exp(tA)$ nach für alle $t \geq 0$.

(c) Berechnen Sie $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(tA)$. Bedeutung?

(44) Nehmen Sie an, der Markt für Waschmittel sei auf die Produkte Ariel, Persil und Skip beschränkt und lasse sich durch eine Markov-Kette mit diesen drei Zuständen beschreiben. Für die Kaufübergangswahrscheinlichkeiten sei bekannt, dass sich ein Persil-Käufer mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% das nächste Mal für Ariel und mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% für Skip entscheidet, wogegen ein Ariel-Käufer das nächste Mal alle drei Marken mit gleicher Wahrscheinlichkeit kauft. Über sie Skip-Benutzer weiss man, dass sie nicht zu Persil umsteigen und dass sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% markentreu sind.

- (a) Bestimmen Sie die vollständige einstufige Übergangsmatrix und skizzieren Sie den Übergangsgraphen.
- (b) Am Anfang von Periode 1 teilen sich Ariel und Persil 90% des Marktes je zur Hälfte auf. Wie lauten die Marktanteile der drei Hersteller am Ende von Periode 1?
- (c) Berechnen Sie den Gleichgewichtsvektor.
- (d) Welche Kundentreue muss Persil erreichen, um langfristig den gleichen Marktanteil wie Skip zu bekommen, wenn die Kaufübergangswahrscheinlichkeit von Persil zu Ariel weiterhin 10% beträgt?