

---

# Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

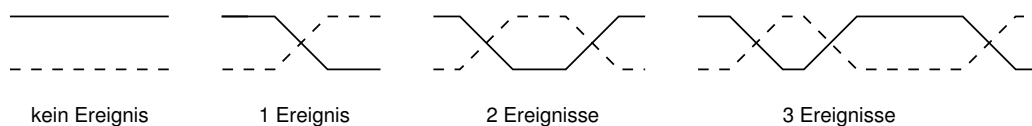
Sommersemester 2018

Präsenzübungsblatt 12

- (45) Louis Pasteur impfte im Jahre 1880 sechs Hühner mit einem Serum gegen Cholera. Als er diese und sechs ungeimpfte Hühner mit Cholera-Erregern infizierte, waren am nächsten Tag sechs Hühner tot. Wäre die Impfung völlig wirkungslos gewesen, dann wären die sechs toten Hühner eine zufällige Auswahl aus allen 12 infizierten Hühnern gewesen.
- (a) Wenn die Impfung wirkungslos gewesen wäre, mit welcher Wahrscheinlichkeit hätte man dann erwarten können, dass die sechs toten Hühner gerade die sechs ungeimpften sein würden (wie es tatsächlich eintrat)?
  - (b) Sie wollen nun statistisch nachweisen, dass das Serum eine Wirkung hatte. Zu diesem Zweck testen Sie die Nullhypothese ‘Tod durch Cholera ist bei ungeimpften Hühnern nicht häufiger als bei geimpften’ gegen die Alternativhypothese ‘Tod durch Cholera ist bei ungeimpften Hühnern häufiger’ ( $\alpha = 0.05$ ). Überlegen Sie sich erst, welcher Verteilung die Zahl der ungeimpften Hühner unter den 6 toten folgen würde, wenn das Serum keine Wirkung hätte. Welches sind die (höchstens) 5 % unwahrscheinlichsten Werte (unter  $H_0$ )? Fällt der beobachtete Wert in diesen Ablehnungsbereich? Welche Aussage können Sie treffen?
- (46) Wir betrachten die Funktion  $f$ , die durch  $f(x) = e^{-2|x|}$  definiert ist.
- (a) Skizzieren Sie  $f$ .
  - (b) Weisen Sie nach, dass  $f$  die Dichte einer kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.
  - (c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Verteilung. *Hinweis:* erst nachdenken!
  - (d) Berechnen Sie die Varianz.

- (e) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion, also  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi$ . *Hinweis:* unterscheiden Sie die Fälle  $x \leq 0$  und  $x > 0$ .
- (f) Berechnen Sie das  $q$ -Quantil (also die Lösung  $x_q$  von  $\mathbb{P}(X \leq x) = q$  einer gemäß  $f$  verteilten Zufallsvariablen  $X$ ) für  $q = \frac{1}{4}$ ,  $q = \frac{1}{2}$  und  $q = \frac{3}{4}$ .

- (47) Während der Meiose findet zwischen homologen Chromosomen Rekombination statt. Dabei können auf einem gegebenen DNA-Abschnitt keine, eine, zwei oder mehrere Überkreuzungen (*Crossover-Ereignisse*) auftreten, gemäß folgender Skizze (jede Linie entspricht einem doppelsträngigen DNA-Molekül):



- (a) Die Zahl  $X$  der Crossover-Ereignisse auf einem gegebenen DNA-Abschnitt (z.B. auf einem Chromosom) wird häufig als Poisson-verteilt angenommen. Begründen Sie, warum bzw. unter welchen Bedingungen diese Annahme sinnvoll ist.
- (b) Wissenschaftler A behauptet, die Zahl der Crossover-Ereignisse auf Chromosom 1 der Maus sei Poisson-verteilt mit Erwartungswert  $\mu = \mathbf{E}(X) = 8$ . Welchen Wert hat dann der Parameter  $\lambda$  der Poisson-Verteilung?
- (c) Wissenschaftler B möchte die Behauptung von Wissenschaftler A überprüfen. Er geht ebenfalls von einer Poisson-Verteilung aus, vermutet aber, dass der Erwartungswert kleiner ist als 8. Wie lauten Null- und Alternativhypothese? Ist die Varianz von  $X$  bekannt, wenn Wissenschaftler A Recht hat? Begründen Sie Ihre Antwort.

Wissenschaftler B plant, die Zahl der Crossover-Ereignisse an einer Stichprobe von  $n = 100$  Chromosomen zu untersuchen. Welcher Verteilung wird der Stichprobenmittelwert folgen, wenn die Behauptung von Wissenschaftler A stimmt? ( $n = 100$  ist groß genug für den Zentralen Grenzwertsatz.) Wissenschaftler B beschließt, die Vermutung von Wissenschaftler A als widerlegt anzusehen, wenn er einen Stichprobenmittelwert von 7.5 Crossovers pro Chromosom oder weniger beobachtet. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er eine falsche Entscheidung trifft, vorausgesetzt, Wissenschaftler A hatte doch Recht?

- (48) Ein Bauer hat erfahren, dass Kühe mehr Milch geben, wenn man sie klassische Musik hören lässt. Er verspricht sich Ähnliches von harter Rockmusik und beschallt seine 12 Milchkühe deshalb eine Woche lang damit. Er beobachtet folgende Milchmengen (in Litern; jeweils Musikwoche/Vorwoche):

20.7/20.0	21.5/33.2	15.0/20.2	14.7/23.6	20.2/23.4	19.0/18.5
20.2/23.3	16.9/26.4	17.1/21.3	18.4/20.1	18.5/23.7	18.9/17.7

Lässt sich die Vermutung des Bauern erhärten ( $\alpha = 0.05$ )?