Ellen Baake
Fernando Cordero

Technische Fakultät
Universität Bielefeld

Bielefeld, 06.07.2018

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2018

Präsenzübungsblatt 13

(49) Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1-q & 0 & q & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & q & 0 & 1-q \end{pmatrix}$$

(a) Für welche Werte von q handelt es sich um eine Markov-Matrix?
Für welche q ist M doppelt stochastisch?
Hinweis: M heißt doppelt stochastisch, wenn sowohl M als auch M^t eine Markov-Matrix ist.

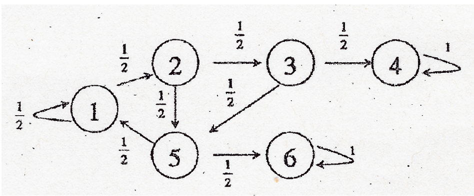
(b) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen zu M und bestimmen Sie (in Abhängigkeit von q) den Typ der Markov-Matrix.

(c) Bestimmen Sie (wieder in Abhängigkeit von q) alle Gleichgewichtsvektoren von M. Was gilt f"ur den Fall, dass M doppelt stochastisch ist?

(d) Berchnen Sie für alle absorbierenden Fälle die Absorptionswahrscheinlichkeiten.
Hinweis: Nach absorbierenden Zuständen aufschlüsseln und vor der Rechnung erst nachdenken!

(50) Wir betrachten eine Markov-Kette.

(a) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix für den folgenden Graphen



(b) Geben Sie alle Gleichgewichtszustände an und begründen Sie ihre Antwort.

(51) Fortsetzung Markov-Ketten.

(a) Bestimmen Sie eine stationäre Verteilung der allgemeinen 2×2 Übergangsmatrix.

(b) Sei M eine Übergangsmatrix, bei der alle Zeilen gleich sind. Bestimmen Sie eine stationäre Verteilung von M.

(c) M sei eine symmetrische Übergangsmatrix. Wie lautet hier eine stationäre Verteilung?

(52) Ein zerstreuter Professor besitzt vier Regenschirme. Er geht jeden Morgen in die Uni, und wenn es regnet, nimmt er einen Schirm mit – falls er gerade einen zu Hause hat. Abends geht er wieder nach Hause und nimmt, falls es regnet, und falls er gerade einen Schirm in der Uni hat, einen mit. Wenn es nicht regnet, nimmt er keinen Schirm mit. Die Wahrscheinlichkeit, dass es bei einem Gang des Professors regnet, sei immer gleich p, wobei $0 < p < 1$.

(a) Beschreiben Sie das als Markov-Kette, wobei die Zustände die Zahl der Schirme am jeweiligen Standort des Professors sind. Skizzieren Sie also den zugehörigen Markov-Graphen und bestimmen Sie die zugehörige Markov-Matrix M.

(b) Welche Bedeutung haben die Einträge der k-ten Potenz M^k von M, wobei $k \in \mathbb{N}$? Welche Bedeutung haben die Einträge von πM^k, wenn π eine beliebige Startverteilung ist?

(c) Zeigen Sie *ohne* Rechnung, dass es genau eine stationäre Verteilung gibt.

(d) Geben Sie zwei Verfahren zur Berechnung der stationären Verteilung an, wobei auch näherungsweise Verfahren erlaubt sind.

(e) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung.

(f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Professor auf lange Sicht bei einem Gang nass?