

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2018

Übungsblatt 8

(29) Betrachten Sie folgende Zufallsvariablen

$$X_i \sim \text{Bin}(2^i, p), \quad 1 \leq i \leq n,$$

sowie

$$Y_i := 2^{n-i} X_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

und

$$Z := \sum_{i=1}^n Y_i.$$

- (a) Nehmen Sie an, die X_i seien unabhängig. Geben Sie $\mathbb{E}(X_i)$ und $\mathbb{V}(X_i)$ an. Berechnen Sie dann $\mathbb{E}(Y_i)$, $\mathbb{V}(Y_i)$, $1 \leq i \leq n$, sowie $\mathbb{E}(Z)$ und $\mathbb{V}(Z)$, jeweils als Funktion von n und p (und natürlich i).
- (b) Nehmen Sie nun an, die X_i seien *nicht* unabhängig. Welche der Ergebnisse aus (a) bleiben dann gültig und welche nicht? Warum?

(3+1 Punkte)

(30) Das Lichtwerk in Bielefeld hat die einmalige Chance die Kino-Vorschau eines preisgekrönten Filmes vor ausgewähltem Publikum auszustrahlen. Der größte Saal hat leider nur 300 Sitzplätze. Erfahrungsgemäß erscheinen am Ende 15% der eingeladenen Gäste nicht. Wie viele Einladungen darf das Lichtwerk verschicken, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der eingeladenen Gäste stehen muss, bei unter 2.5% liegt? Verwenden Sie die Normalapproximation.

(2 Punkte)

(31) Die Fakultätskonferenz der Soziologie-Fakultät hat 40 stimmberechtigte Mitglieder. Diese Mitglieder werden dazu aufgerufen, für oder gegen den Erhalt einer permanenten Mitarbeiterstelle zu stimmen. Nehmen wir an, dass eine Gruppe von

x Personen geschlossen für den Erhalt der Mitarbeiterstelle stimmt. Die restlichen Mitglieder sind unentschieden und entscheiden zufällig und unabhängig voneinander, ob sie dafür oder dagegen abstimmen.

- (a) Sei $x = 4$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird mehrheitlich für die Mitarbeiterstelle abgestimmt ($> 50\%$ der Stimmen)?
- (b) Zeige, dass die Mitarbeiterstelle mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $\Phi\left(-\frac{x}{\sqrt{40-x}}\right)$ abgelehnt wird. Bei welcher Gruppengröße x wird mit 99%-iger Sicherheit mehrheitlich für die Mitarbeiterstelle gestimmt?
- (c) Ab welcher Gruppengröße x wird die Mitarbeiterstelle mit 99%-iger Sicherheit mindestens $2/3$ der Stimmen erhalten?
- (d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine $2/3$ -Mehrheit, wenn alle Mitglieder der Fakultätskonferenz zufällig abstimmen ($x = 0$)?

Verwenden Sie stets die Normalapproximation.

(1.5+1.5+2.5+1.5 Punkte)

- (32)** Man betrachte die Lotterie „6 aus 49“. Es werden 100 000 000 unabhängig und rein zufällig erzeugte Tippreihen abgegeben.

Wie ist die Anzahl der Reihen mit 6 Richtigen approximativ verteilt?

(2 Punkte)

Abgabe in der Vorlesung