Ellen Baake
Fernando Cordero

Technische Fakultät
Universität Bielefeld

Bielefeld, 08.06.2018

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2018

Übungsblatt 9

(33) Sei X_i, $i = 1, \ldots, n$ eine Familie von iid Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2.

(a) Betrachten Sie, wie in der Vorlesung besprochen, die empirische Varianz als Zufallsvariable, also die Größe

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2.$$

Zeigen Sie, dass $E(S^2) = \sigma^2$.

(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte von

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

und

$$\tilde{\tilde{S}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$$

(c) Diskutieren Sie die Ergebnisse aus (33a) und 33b).

(2+2+1 Punkte)

(34) Betrachten Sie die Stichprobe in Form der Urliste $(1, 3, 2, 3, 2, 2, 0, 2, 3, 1)$.

(a) Nehmen Sie an, dass die oben genannten Werte Realisierungen einer Zufallsvariablen mit unbekannter Verteilung sind. Geben Sie erwartungstreue Schätzer für den Erwartungswert und die Varianz der Verteilung an.

(b) Die Daten der Stichprobe seien jetzt Realisierungen einer Binomialverteilung $\mathcal{B}(3, p)$. Verwenden Sie nun den empirischen Mittelwert für eine Schätzung des Parameters p.

(1+1 Punkte)

(35) Betrachten Sie die mathematische Stichprobe (X_1, X_2, X_3) aus einer Verteilung mit unbekanntem Erwartungswert und unbekannter Varianz σ^2. Betrachten Sie die Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} U_1 &:= \tfrac{1}{3}\textstyle\sum_{i=1}^{3}(X_i-\mu)^2 \\ U_2 &:= \tfrac{1}{3}\textstyle\sum_{i=1}^{3}\left(X_i-\bar{X}\right)^2 \\ U_3 &:= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{3}\left(X_i-\bar{X}\right)^2 \\ U_4 &:= X_1^2 - X_2X_3. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Erwartungswerte für U_1, U_2, U_3 und U_4. Welche Größe(n) erscheint (erscheinen) als Schätzer für σ^2 geeignet und warum? **(4 Punkte)**

(36) In einer großen Stadt gibt es $N > 1$ Taxis, die – von außen gut lesbar – die Nummern $1, \ldots, N$ tragen. Ein Passant steht an einer viel befahrenen Straße und notiert die Nummern der ersten n Taxis, die vorbeikommen, der Reihe nach als $X_1, \ldots, X_n$. Es darf angenommen werden, dass die Taxinummern gleichmäßig über die Stadt verteilt sind, so dass die X_i unabhängig und auf $\{1, \ldots, N\}$ gleichverteilt sind. Unser Passant möchte N schätzen.

Er überlegt sich dafür zwei Möglichkeiten. Als erste Möglichkeit nimmt er als Schätzer die größte beobachtete Nummer, also

$$U_n := \max(X_1, ..., X_n),$$

als zweite Möglichkeit nimmt er den doppelten Stichprobenmittelwert, also

$$\widetilde{U}_n := \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X_i)$.

(b) Ohne $\mathbb{E}(U_n)$ auszurechnen, können Sie bereits sagen, dass U_n nicht erwartungstreu sein kann. Warum nicht?

(c) Berechnen Sie nun $\mathbb{E}(\widetilde{U}_n)$. Ist $\widetilde{U}_n$ ein erwartungstreuer Schätzer für N? Wenn nein, geben Sie eine modifizierte Variante U_n^* an, die erwartungstreu für N ist.

(d) Berechnen Sie $\mathbb{P}(U_n \leq k)$ für $1 \leq k \leq N$ und leiten Sie daraus die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(U_n = k)$ her.

Hinweis: Überlegen Sie sich erst $\mathbb{P}(X_i \leq k)$, $1 \leq k \leq N$, und bedenken Sie, dass das Ereignis $\{U_n \leq k\}$ gleich dem Ereignis $\{X_1 \leq k, X_2 \leq k, ..., X_n \leq k\}$ ist.) **(1+1+1+2 Punkte)**

Abgabe vor Vorlesung (bis 10:15 Uhr)