Ellen Baake
Fernando Cordero

Technische Fakultät
Universität Bielefeld

Bielefeld, 15.06.2018

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2018

Übungsblatt 10

(37) Die Menge an produzierten Weintrauben pro Weinrebe ist für Winzer von großer Bedeutung. Für einen Test wurde das Gewicht der produzierten Weintrauben von je 10 zufällig ausgesuchten Weinreben eines Weingutes gemessen. Die folgenden Werte (in kg) sind dabei gemessen worden:

$$2.4 \quad 3.4 \quad 3.6 \quad 4.1 \quad 4.3 \quad 4.7 \quad 5.4 \quad 5.9 \quad 6.5 \quad 6.9$$

Nehmen Sie an, dass das Gewicht der Weintrauben pro Weinrebe $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilt ist.

(a) Bestimmen Sie den Stichprobenmittelwert und die empirische Varianz der Stichprobe.

(b) Geben Sie das 95% Konfidenzintervall für μ an.

(c) Angenommen, die Standardabweichung der Traubenproduktion pro Pflanze sei von nun an bekannt mit $\sigma = 1.4$. Geben Sie erneut das 95% Konfidenzintervall für μ an.

(d) Wieviele Pflanzen sollten mindestens untersucht werden, damit μ mit 99% Sicherheit auf ± 500 Gramm genau geschätzt werden kann.

(1+1+1+1 Punkte)

(38) Eine Betrunkene hat in ihrer Tasche n Schlüssel, von denen nur einer zum Schloss ihrer Wohnung passt. Sie zieht nacheinander zufällig jeweils einen Schlüssel aus der Tasche und probiert ihn aus; wenn er nicht passt, legt sie ihn in die Tasche zurück.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unsere Betrunkene gleich mit dem ersten Griff den richtigen Schlüssel zieht?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Schlüssel spätestens beim dritten Griff passt?

(b) Welcher Verteilung folgt die Zahl der Versuche, bis der passende Schlüssel gefunden ist? Begründen Sie Ihre Antwort.
Wie viele Versuche sind im Mittel nötig, bis die Tür sich öffnet?

(c) Jemand beobachtet nun 10 Betrunkene, von denen jede dieselbe, aber dem Beobachter unbekannte Zahl von n Schlüsseln in der Tasche hat und dasselbe tut wie oben beschrieben. Unser Jemand notiert dabei, beim wievielten Versuch jeweils der passende Schlüssel gefunden ist, und erhält folgende Liste:

Betrunkene Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
benötigte Versuche	1	3	4	7	6	4	3	5	5	6

Geben Sie einen Punktschätzer für n an. Begründen Sie Ihre Antwort.
Ist der Schätzer erwartungstreu? Warum – oder warum nicht?

(d) Jemand beobachtet nun 100 Betrunkene, von denen jede dieselbe, aber dem Beobachter unbekannte Zahl n von Schlüsseln in der Tasche hat und dasselbe tut wie oben beschrieben. Unser Jemand beobachtet, dass unsere Betrunkenen im Mittel 5.3 Versuche brauchen, und gibt als 95 % Konfidenzintervall für n das Intervall $[4.7, 6, 1]$ an. Erklären Sie, warum unser Jemand sich da wohl verrechnet haben muss. **(1+1+1+1 Punkte)**

(39) An einer repräsentativen Umfrage haben sich 40 % aller 1 250 Befragten für Partei A ausgesprochen.

(a) Wie genau ist der Schätzwert, wenn wir die Befragten als rein zufällige Stichprobe ansehen und das Konfidenzniveau von 0.95 zugrunde legen?

(b) Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein, damit der Prozentsatz der Wähler der Partei A (zu erwartender Prozentsatz 40 %) bis auf ± 1 % genau geschätzt wird (Konfidenzniveau 0.95)? **(1+2 Punkte)**

(40) Die diskrete Zufallsvariable X sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $q_n := \mathbb{P}(X = n \,|\, X > 0)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und weisen Sie nach, dass hierdurch eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{N}$ gegeben ist.

(b) Sei Y die Zufallsvariable mit der in (40a) ermittelten Verteilung. Berechnen Sie den Erwartungswert von Y.

(c) Berechnen Sie das 2. Moment und die Varianz von Y.

(d) Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion von Y durch

$$\phi(t) = \frac{1}{e^{\lambda} - 1}\big(\exp(\lambda\, e^{it}) - 1\big)$$

gegeben ist, und prüfen Sie die Normierung und die Formel für den Erwartungswert mittels ϕ nach.

(1+1+1+1 Punkte)

Abgabe vor Vorlesung (bis 10:15 Uhr)