Ellen Baake
Fernando Cordero

Technische Fakultät
Universität Bielefeld

Bielefeld, 22.06.2018

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2018

Übungsblatt 11

(41) Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & x & y & z \\ y & y & \frac{13}{16} & y \\ z & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3x & 6y & \frac{1}{8}z \end{pmatrix}$$

Können x, y, z so gewählt werden, dass M eine Markov-Matrix wird? Begründen Sie Ihre Antwort!

(3 Punkte)

(42) Geben Sie je eine 3×3 Markov-Matrix mit folgender Eigenschaft an:

(a) primitiv;

(b) nicht irreduzibel;

(c) irreduzibel, aber nicht primitiv. **(1+1+1 Punkte)**

(43) Gegeben sei eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie durch Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$P^n = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

(b) Zeigen sie, dass P irreduzibel ist.

(c) Berechnen sie die stationäre Verteilung von P.

(d) Was passiert mit $(P^n)_{i,j}$ für $n \to \infty$?

(3+1+1+1 Punkte)

(44) Gegeben sei eine Markov-Kette mit Anfangsverteilung $\mu := (1, 0)$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie durch Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu P^n = \left(\frac{1 + 2^{-n}}{2}, \frac{1 - 2^{-n}}{2} \right).$$

(b) Was passiert mit μP^n für $n \to \infty$.

(3+1 Punkte)

Abgabe vor Vorlesung (bis 10:15 Uhr)