Ellen Baake
Fernando Cordero

Technische Fakultät
Universität Bielefeld

Bielefeld, 29.06.2018

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2018

Übungsblatt 12

(45) Die Bakterienspezies Rüsselpestobacter kann resistent oder sensitiv gegenüber einem bestimmten Antibiotikum sein. Das Resistenzgen ist auf einem Plasmid lokalisiert. Jede Bakterienzelle enthält genau 6 Plasmide, jedes davon trägt – unabhängig voneinander – das Resistenzgen mit Wahrscheinlichkeit p. Das Bakterium ist resistent, wenn mindestens eines seiner Plasmide das Resistenzgen trägt.

Ein Wissenschaftler möchte p schätzen. Er kann die Plasmide nicht einzeln untersuchen; aber er kann feststellen, ob ein Bakterium resistent ist oder nicht.

(a) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bakterium resistent ist, sei u. Geben Sie u als Funktion von p an.

Der Wissenschaftler testet 10^4 Bakterien; er findet heraus, dass 141 davon resistent sind. Geben Sie Schätzwerte für u und p an.

(b) Im Lehrbuch steht $u = 0.01$, dieser Wert ist aber 15 Jahre alt. Aufgrund der zunehmenden Verbreitung von Resistenzen besteht der Verdacht, dass der Wert heute höher liegt. Führt der in (a) beobachtete Wert zu einer Erhärtung des Verdachts ($\alpha = 0.03$)? Geben Sie das Hypothesenpaar an. Was ist die Prüfgröße, und welcher Verteilung folgt sie unter H_0 (näherungsweise; warum?)? Führen Sie den Test durch.

(c) Nehmen Sie an, der wahre Wert heute sei $u_h = 0.012$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Test wie der unter (b) die Veränderung nicht detektiert?

(1+2+2 Punkte)

(46) Die Länge von 15 verschiedenen Kuckuckseiern (in Millimetern) wurde vermessen und niedergeschrieben:

19.8, 22.1, 21.5, 20.9, 22, 21, 22.3, 21, 20.3, 20.9, 22, 22, 20.8, 21.2, 21.

Nehmen Sie an, dass die Länge von Kuckuckseiern normalverteilt ist mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2.

(a) Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert und die empirische Varianz.

(b) Testen Sie $\mathcal{H}_0 : \mu = 21$ gegen $\mathcal{H}_A : \mu \neq 21$ zum Signifikanzniveau α =0.05

(1+3 Punkte)

(47) Honigbienen haben ein hervorragendes Orientierungsvermögen und finden zuverlässig zu ihrem Stock zurück. Die Rückkehrzeiten aus 500 m Entfernung sind jahrzehntelang immer wieder untersucht und gemessen worden und als normalverteilt mit Mittelwert 8 min. und Standardabweichung von 2 min. bekannt.

In den letzten Jahren häufen sich allerdings die Indizien dafür, dass – bedingt durch das Herbizid Glyphosat – das Orientierungsvermögen der Bienen leidet und die Rückkehrzeiten länger werden. Diesem Verdacht soll nun nachgegangen werden. Zu diesem Zweck werden 40 zufällig ausgewählte Bienen auf einem standardisierten 500-Meter-Heimkehrflug beobachtet und die Zeiten gemessen.

(a) Welchen Test muss man machen? Wie lautet die Nullhypothese und wie die Alternativhypothese?

(b) Wie groß muss – bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.05$ – der Stichprobenmittelwert mindestens ausfallen, damit die Nullhypothese abgelehnt wird?

(c) Wenn die Heimkehrzeit der Bienen tatsächlich nach $N(9, 6)$ verteilt ist, wie groß ist dann die Chance, dass die Veränderung anhand des (in (47a) und (47b) vereinbarten) Tests festgestellt wird? Beschreiben Sie die Situation anhand einer Skizze und diskutieren Sie Ihre Antwort im Hinblick auf Fehler beim Testen.

(1+1+2 Punkte)

(48) Beweisen Sie die folgende Rechenregel für Zufallsvariablen:

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\big[\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\big]$$

Hinweis: Verwenden Sie die Linearität des Erwartungswertes.

(3 Punkte)

Abgabe vor der Vorlesung (bis 10:15 Uhr)